PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA II

TEMA 1 CADENAS DE MARKOV EN TIEMPO DISCRETO

CONTENIDOS

1. Procesos Estocásticos y de Markov
2. Cadenas de Markov en Tiempo Discreto (CMTD)
3. Comportamiento de Transición de las CMTD
4. Comportamiento Estacionario de las CMTD

1. Procesos Estocásticos y de Markov

1.1. Definición de Proceso Estocástico

Un ***fenómeno aleatorio*** es un fenómeno empírico que obedece a leyes probabilísticas en lugar de determinísticas.

Un ***proceso estocástico*** es un fenómeno aleatorio que surge en un proceso que se desarrolla en el tiempo de una manera controlada por medio de leyes probabilísticas.

Así, un ***proceso estocástico*** es una familia de variables aleatorias que proporcionan una descripción de la evolución de un determinado fenómeno físico a través del tiempo.

$$\{X(t),\ t \in T\}$$

$X(t)$ estado del proceso en el instante *t*

T conjunto de índices del proceso

1.2. Clasificación de los Procesos Estocásticos

Proceso estocástico
$\{X(t),\ t \in T\}$

T Numerable

Proceso estocástico en tiempo discreto
$\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$

T Intervalo de la recta real

Proceso estocástico en tiempo continuo
$\{X(t),\ t \geq 0\}$

Espacio de estados del proceso es el conjunto de todos los valores posibles que puede tomar la variable aleatoria $X(t)$

Clasificación de Procesos Estocásticos:

Tiempo discreto y espacio de estados discreto.

Ejemplo: Jugador con 3 € y en cada jugada puede ganar o perder 1 € con probabilidad *p* y 1-*p*. Deja de jugar cuando tenga 0 o 6 €.

Tiempo discreto y espacio de estados continuo.

Ejemplo: Cantidad de agua almacenada en un pantano cada hora.

Tiempo continuo y espacio de estados discreto.

Ejemplo: Número de ordenadores ocupados.

Tiempo continuo y espacio de estados continuo.

Ejemplo: m^3 de agua almacenada en un pantano en cada instante.

La Teoría de la Probabilidad se ha centrado fundamentalmente en el estudio de la ***independencia*** y sus consecuencias

$$P\left(X_n \in A_n, X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_0 \in A_0\right) \\ = P\left(X_n \in A_n\right) P\left(X_{n-1} \in A_{n-1}\right) \cdots P\left(X_0 \in A_0\right)$$

Un ***Proceso de Markov*** es un proceso estocástico que verifica

$$P\left(X_{n+1} \in A_{n+1} \mid X_n \in A_n, \ldots, X_0 \in A_0\right) = P\left(X_{n+1} \in A_{n+1} \mid X_n \in A_n\right)$$

Interpretación de un Proceso de Markov:

$$P\left(\underbrace{X_{n+1} \in A_{n+1}, \ldots, X_{n+m} \in A_{n+m}}_{\text{Futuro}} \mid \underbrace{X_n \in A_n}_{\text{Presente}}, \underbrace{\ldots, X_0 \in A_0}_{\text{Pasado}}\right)$$

$$= P\left(\underbrace{X_{n+1} \in A_{n+1}, \ldots, X_{n+m} \in A_{n+m}}_{\text{Futuro}} \mid \underbrace{X_n \in A_n}_{\text{Presente}}\right), \ \forall n, m.$$

Las predicciones del futuro del proceso, una vez conocido el estado actual, no pueden mejorar con conocimiento adicional del pasado.

2 Definición de Cadena de Markov en Tiempo Discreto

Cadena es un proceso estocástico con espacio de estados discreto.

Cadena en tiempo discreto es un proceso estocástico en tiempo discreto con espacio de estados discreto

Cadena en tiempo continuo un proceso estocástico en tiempo continuo con espacio de estados discreto

Un proceso estocástico $\{X_n,\ n = 0, 1, 2,\ldots\}$es una ***Cadena de Markov en Tiempo Discreto*** **(CMTD)** si para cada n y x_j, j=0,…,n+1, se verifica

$$P\left(X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\right)=P\ \left(X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_n=x_n\right)$$

La ***probabilidad de transición en un paso*** del estado x_n al x_{n+1} en el instante $n+1$ *es:*

$$p_{x_n x_{n+1}}(n)=P\left(X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_n=x_n\right),\ x_n,x_{n+1}\in S$$

Sin pérdida de generalidad y para simplificar la notación, escribiremos la ***probabilidad de transición en un paso*** del estado i al estado j en el instante $n+1$ como

$$p_{ij}(n) = P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right), \ i,j \in S.$$

La CMTD se denomina ***homogénea*** si $p_{ij}(n)$ no depende de n, es decir,

$$P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right) = P\left(X_{n+m+1} = j \mid X_{n+m} = i\right)$$

En tales casos escribiremos p_{ij} en lugar de $p_{ij}(n)$.

La matriz formada por las probabilidades de transición en un paso se denomina ***matriz de transición*** o ***matriz de probabilidades de transición*** y toma la forma

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

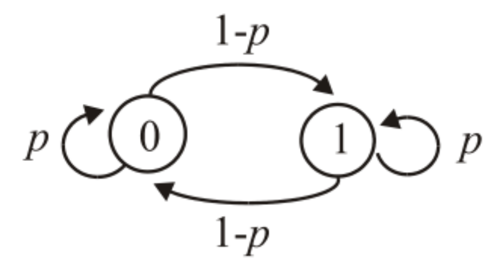
P es una matriz cuadrada no negativa cuyas filas suman la unidad, es decir, $0 \leq p_{ij} \leq 1$ y $\sum_j p_{ij} = 1$ para cada $i \in S$. Por lo tanto, **P** es una ***matriz estocástica.***

Gráficamente, una CMTD con espacio de estados finito se puede representar mediante un ***diagrama de transición***, es decir, mediante un grafo dirigido finito, donde cada nodo representa un estado de la cadena, los arcos representan las posibles transiciones entre estados y sobre los arcos se indican las probabilidades de transición entre los estados representados por los nodos unidos por cada arco.

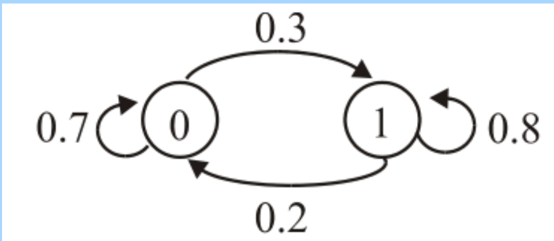
Ejemplo (Sistema de comunicaciones) Consideremos un sistema de comunicaciones que transmite dígitos 0 y1. Cada dígito debe pasar por varias fases, en cada una de las cuales hay una probabilidad p de que el dígito que entra coincida con el que sale. Las fases son independientes entre sí.

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & \text{si } i = j \\ 1-p, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$



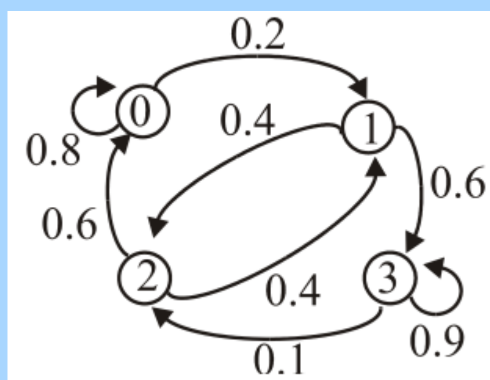
Ejemplo (Fiabilidad de un sistema) Se sabe que un sistema fallará o no dependiendo de si ha fallado o no el día anterior. La probabilidad de que falle un día sabiendo que ha fallado el día anterior es de 0.7, pero si no ha fallado el día anterior es de 0.2.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (Transformando un proceso en una cadena de Markov) Consideremos de nuevo el ejemplo de fiabilidad de un sistema en el que ahora suponemos que el estado en el que se encuentra el sistema un día depende de lo que ha ocurrido los dos días anteriores. Concretamente, supongamos que si falló ayer y falla hoy, fallará mañana con probabilidad 0.8; si está fallando hoy pero no ayer, entonces fallará mañana con probabilidad 0.6; si falló ayer pero no hoy, entonces fallará mañana con probabilidad 0.4; si no ha fallado ni hoy ni ayer, entonces fallará mañana con probabilidad 0.1.

Estados: 0 (falló ayer y hoy),
1 (falló ayer pero no hoy),
2 (no falló ayer pero sí hoy),
3 (no falló ni ayer ni hoy).



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

La ***distribución de probabilidad inicial*** de X_0 es

$$\boldsymbol{\pi}^0 = \left(\pi_0^0, \pi_1^0, \pi_2^0, \ldots\right)$$

$$\pi_i^0 = P\left(X_0 = i\right)$$

Una cadena de Markov queda determinada si se conocen las probabilidades de transición, p_{ij}, y la distribució de probabilidad inicial, $\boldsymbol{\pi}^0$.

$$\begin{aligned}
&P\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n\right) \\
&= P\left(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\right) \cdots P\left(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0\right) P\left(X_0 = i_0\right) \\
&= P\left(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}\right) \cdots P\left(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0\right) P\left(X_0 = i_0\right) \\
&= p_{i_{n-1} i_n} p_{i_{n-2} i_{n-1}} \cdots p_{i_0 i_1} \pi_{i_0}^0 .
\end{aligned}$$

3 Comportamiento de transición

Comencemos esta sección estudiando los tiempos de permanencia de la cadena en cada estado. Supongamos que la cadena está en el estado i. Entonces, permanecerá en el estado i en el próximo paso con probabilidad p_{ij} y dejará el estado i con probabilidad $1-p_{ii}$. Por lo tanto, ***la probabilidad de que la cadena permanezca en el estado i exactamente m pasos***, supuesto que hemos comenzado ese estado es $p_{ii}^{m}(1-p_{ii})$, es decir, el tiempo de permanencia en el estado i se distribuye geométricamente.

Las ***probabilidades de transición en n pasos*** son las probabilidades de transición del estado i al estado j en n pasos y se denotan como

$$p_{ij}^{(n)} = P\left(X_n = j \mid X_0 = i\right) = P\left(X_{n+m} = j \mid X_m = i\right)$$

Por lo tanto, $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}.$

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n+m)} &= P\left(X_{n+m}=j \mid X_0=i\right)=\sum_{k=0}^{\infty} P\left(X_{n+m}=j, X_n=k \mid X_0=i\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(X_{n+m}=j \mid X_n=k, X_0=i\right) P\left(X_n=k \mid X_0=i\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(X_{n+m}=j \mid X_n=k\right) P\left(X_n=k \mid X_0=i\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{kj}^{(m)} p_{ik}^{(n)}=\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} . \end{aligned}$$

Si denotamos con $\mathbf{P}^{(n)}$ la matriz de transición en n pasos, lo que nos están diciendo las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov es que

$$\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)}\,\mathbf{P}^{(m)}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^{(1)}\,\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}\mathbf{P}$$
$$\mathbf{P}^{(3)} = \mathbf{P}^{(2)}\,\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}^{3}$$
$$\ldots$$

Una vez conocidas las probabilidades de transición en *n* pasos calculemos la ***distribución marginal del paso n-ésimo***

$$P\left(X_n = j\right) = \sum_i P\left(X_n = j \mid X_0 = i\right) P\left(X_0 = i\right) = \sum_i p_{ij}^{(n)} \pi_i^0$$

Dentemos la distribución de probabilidad en *n* pasos como:

$$\boldsymbol{\pi}^n = \left(\pi_0^n, \pi_1^n, \pi_2^n, \ldots\right), \text{ con } \pi_i^n = P\left(X_n = i\right)$$

Entonces $\pi^n = \pi^0 P^n$

Ejemplo (Continuación del ejemplo de Fiabilidad de un sistema)

1.¿Cuál es la probabilidad de que el sistema falle dentro de cuatro días sabiendo que hoy no ha fallado?
2.¿Cuál es la probabilidad de que el sistema falle el cuarto día sabiendo que inicialmente la probabilidad de fallar es de 0.4 y la de no fallar es de 0.6?

$$p_{10}^{(4)} = P\left(X_4 = 0 \mid X_0 = 1\right)$$

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{PP} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^2\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4375 & 0{,}5625 \\ \mathbf{0{,}375} & 0{,}625 \end{pmatrix}$$

$$p_{10}^{(4)} = P\left(X_4 = 0 \mid X_0 = 1\right) = 0{,}375$$

$$P\left(X_4 = 0\right) = \sum_{i=0}^{1} p_{i0}^{(4)} \pi_i^0 = 0{,}4375 \times 0{,}4 + 0{,}375 \times 0{,}6 = 0{,}4$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}^1 &= \boldsymbol{\pi}^0\mathbf{P} = (0{,}4, 0{,}6) \\ \boldsymbol{\pi}^2 &= \boldsymbol{\pi}^0\mathbf{P}^2 = \boldsymbol{\pi}^1\mathbf{P} = (0{,}4, 0{,}6) \\ \boldsymbol{\pi}^3 &= \boldsymbol{\pi}^0\mathbf{P}^3 = \boldsymbol{\pi}^2\mathbf{P} = (0{,}4, 0{,}6) \\ \boldsymbol{\pi}^4 &= \boldsymbol{\pi}^0\mathbf{P}^4 = \boldsymbol{\pi}^3\mathbf{P} = (\mathbf{0{,}4}, 0{,}6) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\pi}^4 = \boldsymbol{\pi}^0\mathbf{P}^4 = (0{,}4, 0{,}6) \begin{pmatrix} 0{,}4375 & 0{,}5625 \\ 0{,}375 & 0{,}625 \end{pmatrix} = (\mathbf{0{,}4}, 0{,}6)$$

$$P\left(X_4 = 0\right) = \pi_0^4 = 0{,}4$$

Estado esperado en el instante n suponiendo que se parte del estado i:

$$E\left(X_n \mid X_0 = i\right) = \sum_{j=0}^{\infty} jP\left(X_n = j \mid X_0 = i\right) = \sum_{j=0}^{\infty} jp_{ij}^{(n)}$$

Estado esperado en el instante n:

$$E\left(X_n\right) = \sum_{j=0}^{\infty} jP\left(X_n = j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} j \sum_{i} p_{ij}^{(n)} \pi_i^0$$

Ejemplo (Continuación del ejemplo de Fiabilidad de un sistema)

1. ¿Cuál es el estado esperado dentro de cuatro días sabiendo que hoy no ha fallado?
2. ¿Cuál es el estado esperado para el cuarto día sabiendo que la distribución de probabilidad inicial es (0.4, 0.6)?

$$E\left(X_4 \mid X_0 = 1\right) = \sum_{j=0}^{1} jp_{1j}^{(4)} = 0 \times 0{,}375 + 1 \times 0{,}625 = 0{,}625$$

$$E\left(X_4\right) = \sum_{j=0}^{1} j \sum_{i} p_{ij}^{(4)} \pi_i^0 = 0 \times 0{,}4 + 1 \times 0{,}6 = 0{,}6$$

Cálculo de la matriz $\mathbf{P}^n$ de forma eficiente:

$$\mathbf{P} = \mathbf{H}\mathbf{D}\mathbf{H}^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P}^n = \mathbf{H}\mathbf{D}^n\mathbf{H}^{-1}$$

H matriz de autovectores

$$(\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

D matriz de autovalores

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

3 Comportamiento Estacionario

Ejemplo (Continuación del ejemplo de Fiabilidad de un sistema)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0{,}4375 & 0{,}5625 \\ 0{,}375 & 0{,}625 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\mathbf{P}^8 = \begin{pmatrix} 0{,}40234 & 0{,}59766 \\ 0{,}39844 & 0{,}60156 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{P}^{16} = \begin{pmatrix} 0{,}40001 & 0{,}59999 \\ 0{,}39999 & 0{,}60001 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{P}^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\pi}^n = \boldsymbol{\pi}^0 \mathbf{P}^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$$

Ejemplo. Consideremos la CMTD con matriz de transición $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{P}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$\mathbf{P}^n$ no tiene límite.

Ejemplo. Consideremos la CMTD con matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\pi}^0 = (1,0,0,0) \Rightarrow \boldsymbol{\pi}^n = \boldsymbol{\pi}^0\mathbf{P}^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{\pi} = (1/2,1/2,0,0)$

$\boldsymbol{\pi}^0 = (0,0,0,1) \Rightarrow \boldsymbol{\pi}^n = \boldsymbol{\pi}^0\mathbf{P}^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{\pi} = (0,0,1/2,1/2)$

3.1 Clasificación de estados

El estado j es ***accesible*** desde el estado i, $i \rightarrow j$ si $p_{ij}^{(n)} > 0$ para algún $n \geq 0$.

Dos estados i y j ***comunican***, denotado como $i \leftrightarrow j$ si son accesibles entre sí.

Denotemos

$$p_{ii}^{(0)} = P(X_0 = i \mid X_0 = i) = 1,$$
$$p_{ij}^{(0)} = P(X_0 = j \mid X_0 = i) = 0, \text{ si } i \neq j$$

Proposición. La relación de comunicación es una relación de equivalencia, es decir, verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Demostración. La relación de comunicación, $\leftrightarrow$, es:

i) reflexiva, ya que $i \leftrightarrow i, \forall i$, al ser $p_{ii}^{(0)} = 1 > 0$;

ii) simétrica, ya que si $i \leftrightarrow j \Leftrightarrow \exists n, m$ tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$ y $p_{ji}^{(m)} > 0 \Leftrightarrow j \leftrightarrow i$;

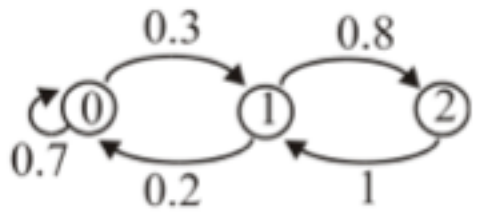
iii) transitiva, ya que si $i \leftrightarrow j$ $\left(\exists n, m \text{ tal que } p_{ij}^{(n)} > 0 \text{ y } p_{ji}^{(m)} > 0\right)$ y $j \leftrightarrow k$ $\left(\exists n', m' \text{ tal que } p_{jk}^{(n')} > 0 \text{ y } p_{kj}^{(m')} > 0\right) \Rightarrow i \leftrightarrow k$ pues $\exists n+n', m+m'$ tal que $p_{ik}^{(n+n')} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(n')} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(n')} > 0$ y $p_{ki}^{(m+m')} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{kr}^{(m')} p_{ri}^{(m)} \geq p_{kj}^{(m')} p_{ji}^{(m)} > 0$. $\triangle$

Por lo tanto podemos considerar ***clases de equivalencias*** con respecto a la relación de comunicación: dos estados que comunican están en una misma clase de comunicación.

Si todos los estados de una cadena de Markov comunican entre sí, es decir si la cadena consta de una sola clase de equivalencia, se dice que es ***irreducible.***

Ejemplo. La cadena de Markov con matriz y diagrama de transición

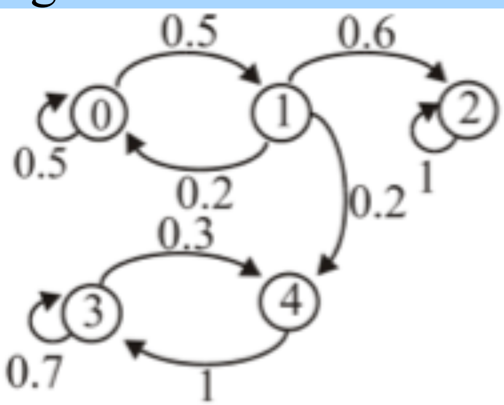
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



es irreducible.

Ejemplo. La cadena de Markov con matriz y diagrama de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



no es irreducible, al tener tres clases de equivalencia: {0,1}, {2} y {3,4}.

El estado i es ***recurrente*** si $f_i = 1$, siendo f_i la probabilidad de que comenzando en el estado i, el proceso vuelva a entrar alguna vez en él.

El estado i es ***transitorio*** si $f_i < 1$, siendo f_i la probabilidad de que comenzando en el estado i, el proceso vuelva a entrar alguna vez en él.

Proposición. El estado i es recurrente si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$

El estado i es transitorio si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$

Corolario. El estado i es recurrente si y sólo si comenzando en el estado i, el número esperado de instantes que la cadena está en i es infinito.

Definamos $A_n = \begin{cases} 1, & \text{si } X_n = i \\ 0, & \text{si } X_n \neq i \end{cases}$ Entonces, el número de instantes que la cadena está en el estado i es $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$

y el número esperado de instantes que la cadena está en i es

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \mid X_0 = i\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(A_n \mid X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = i \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}. \end{aligned}$$

Corolario. El estado i es transitorio si y sólo si comenzando en el estado i, el número esperado de instantes que la cadena está en i es finito.

Corolario. En una cadena de Markov con espacio de estados finito no todos los estados pueden ser transitorios.

Corolario. El estado i es recurrente y j comunica con i, entonces j es recurrente, es decir, la recurrencia es una propiedad de clase.

Demostración. Si i es recurrente $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty$ y como j comunica con i, entonces $\exists n, m$ tales que $p_{ji}^{(n)} > 0$ y $p_{ij}^{(m)} > 0$. Además, $p_{jj}^{(n+k+m)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(m)}, \forall k$. Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(k)} \geq \sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(n+k+m)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ij}^{(m)} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty,$$

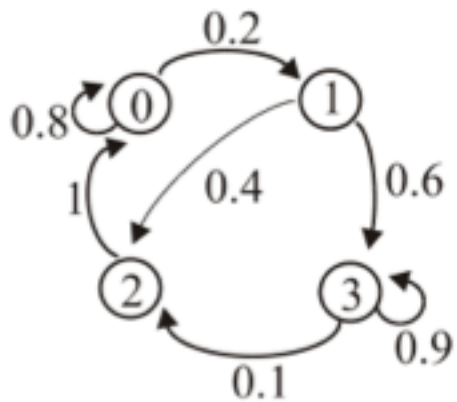
por lo que j es recurrente. $\triangle$

Corolario. El estado i es transitorio y j comunica con i, entonces j es transitorio, es decir, ser transitorio es una propiedad de clase.

Corolario. Todos los estados de una CMTD irreducible finita son recurrentes.

Ejemplo. Consideremos la CMTD con matriz y diagrama de transición.

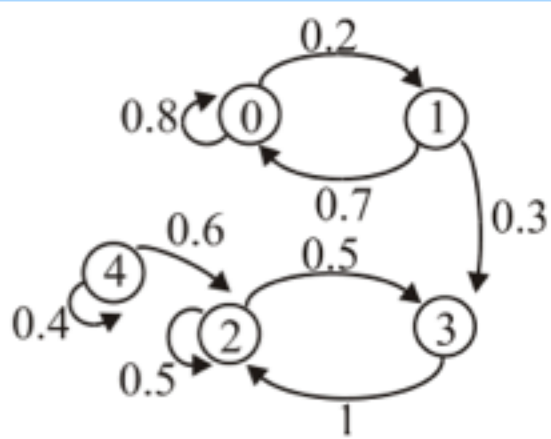
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$



Cadena finita, irreducible y todos los estados recurrentes.

Ejemplo. Consideremos la CMTD con matriz y diagrama de transición.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$



Tres clases de equivalencia: {0,1} transitoria, {2,3} recurrente y {4} transitoria.

Un estado recurrente i se dice que es ***recurrente positivo*** si comenzando en i, el tiempo esperado hasta que la cadena vuelva al estado i es finito. Por el contrario, si el tiempo esperado hasta que la cadena vuelva al estado i es infinito, se dice que es ***recurrente nulo.***

Proposición. Si el estado i es recurrente positivo y j comunica con i, entonces j es recurrente positivo, es decir, la recurrencia positiva es una propiedad de clase.

Demostración. Si i es recurrente positivo entonces $\sum_{k=1}^{\infty} kp_{ii}^{(k)} < \infty$ y si j comunica con i entonces $\exists n, m$ tales que $p_{ji}^{(n)} > 0$ y $p_{ij}^{(m)} > 0$. Además, $p_{jj}^{(n+k+m)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(m)}, \forall k$. Por lo tanto,

$$\infty > \sum_{k=1}^{\infty} kp_{ii}^{(k)} \geq \sum_{k=1}^{\infty} (n+k+m) p_{ii}^{(n+k+m)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ij}^{(m)} \sum_{k=1}^{\infty} kp_{jj}^{(k)},$$

por lo que j es recurrente positivo. $\triangle$

Corolario. En una cadena de Markov con espacio de estados finito, todos los estados recurrentes son recurrentes positivos.

Corolario. Todos los estados de una cadena de Markov irreducible pertenecen a la misma clase, es decir, o bien todos son de transición, o todos son recurrentes nulos o todos son recurrentes positivos. En particular, si la cadena de Markov es finita todos los estados son recurrentes positivos.

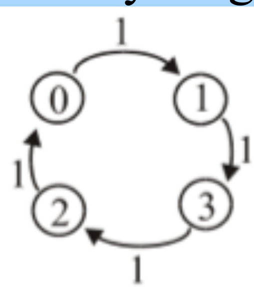
El estado i tiene ***periodo*** d si $P_{ii}^{(n)} = 0$ cuando n no es divisible por d y d es el mayor entero con esa propiedad, es decir, d es el máximo común divisor del conjunto $\left\{n \geq 0 : p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$

Un estado con periodo 1 se dice ***aperiódico.*** Es decir, el periodo de un estado i de una cadena de Markov es el máximo común divisor del número de pasos necesarios para volver al estado i supuesto se ha partido de él.

Proposición. Si el estado i tiene periodo d y j comunica con i, entonces j tiene periodo d, es decir, la periodicidad es una propiedad de clase.

Ejemplo. Consideremos la CMTD con matriz y diagrama de transición.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Todos los estados son periódicos con periodo 4.

El estado i es ***absorbente*** si y sólo si ningún otro estado de la cadena es accesible desde él, es decir, si $P_{ii} = 1$.

El estado i es ***ergódico*** si es aperiódico y recurrente positivo.

Una cadena es ***ergódica*** si todos sus estados son ergódicos.

3.2 Teoremas Límite

El vector de probabilidades de una CMTD se dice ***estacionario*** si cualquier transición de acuerdo con la matriz **P** no tiene efecto sobre esas probabilidades, es decir, se verifica

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, j \geq 0$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P},$$
$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{1}^T = 1.$$

Ejemplo (Continuación del ejemplo de Sistema de comunicaciones)

Consideremos el Ejemplo

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Entonces, el vector de probabilidad estacionario se obtiene resolviendo

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0{,}7\pi_0 + 0{,}3\pi_1 \\ \pi_1 &= 0{,}3\pi_0 + 0{,}7\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 &= 1 \end{aligned} \Longrightarrow \boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1) = (0{,}5, 0{,}5)$$

El vector de probabilidades de una CMTD se dice ***límite*** si

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^n = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^0 \mathbf{P}^n = \boldsymbol{\pi}^0 \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \boldsymbol{\pi}^0 \tilde{\mathbf{P}}$$

El vector de probabilidades de una CMTD se dice el ***único vector de probabilidades de equilibrio*** de la cadena si $\mathbf{P}^n$ y $\boldsymbol{\pi}^n$ convergen independientemente de la distribución inicial $\boldsymbol{\pi}^0$, cada probabilidad es mayor estrictamente que cero.

Ejemplo (Continuación del ejemplo de Sistema de comunicaciones)

Consideremos el Ejemplo
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Existe el único vector de probabilidades de equilibrio.

Si la distribución límite es independiente de $\boldsymbol{\pi}^0$ es porque se verifica:

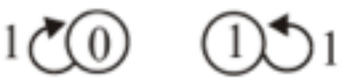
$$\tilde{\mathbf{P}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \tilde{\pi}_0 & \tilde{\pi}_1 & \tilde{\pi}_2 & \cdots \\ \tilde{\pi}_0 & \tilde{\pi}_1 & \tilde{\pi}_2 & \cdots \\ \tilde{\pi}_0 & \tilde{\pi}_1 & \tilde{\pi}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Si el único vector de probabilidad de equilibrio existe, puede obtener como:

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^n = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^{n-1}\mathbf{P} = \tilde{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{P}$$

Ejemplo

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Existe un número infinito de vectores de probabilidades estacionarios.

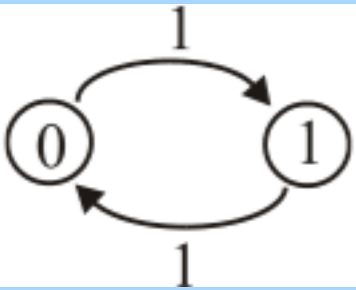
$\mathbf{P}^n$ tiene límite

$$\tilde{\mathbf{P}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \tilde{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\pi}^0 \tilde{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\pi}^0.$$

No existe un único vector de probabilidades de equilibrio.

Ejemplo

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



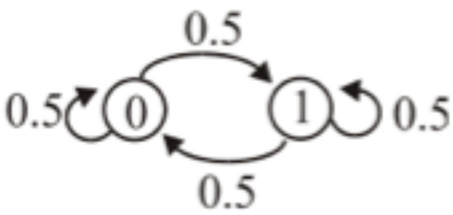
Existe un único vector de probabilidades estacionario $\boldsymbol{\pi} = (0.5, 0.5)$.

$\mathbf{P}^n$ no tiene límite. Por lo tanto, las probabilidades límite no existen.

No existe un único vector de probabilidades de equilibrio.

Ejemplo

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$



Existe un único vector de probabilidades estacionario $\boldsymbol{\pi} = (0.5, 0.5)$.

$\mathbf{P}^n$ tiene límite

$$\tilde{\mathbf{P}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

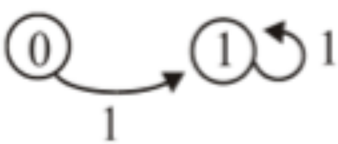
Existe la distribución límite y es independiente de la distribución inicial

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\pi}^0 \tilde{\mathbf{P}} = (0{,}5, 0{,}5)$$

Existe un único vector de probabilidades de equilibrio.

Ejemplo

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Existe un único vector de probabilidades estacionario $\boldsymbol{\pi} = (0, 1)$.

$\mathbf{P}^n$ tiene límite

$$\tilde{\mathbf{P}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Existe la distribución límite y es independiente de la distribución inicial

No existe un único vector de probabilidades de equilibrio.

Teorema. Si **P** es la matriz de transición de una cadena de Markov **finita**, **irreducible** y **aperiódica**, este una única distribución de probabilidad de equilibrio, es decir, existe una única distribución que satisface

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

Además, para cualquier distribución inicial $\boldsymbol{\pi}^0$, tiene

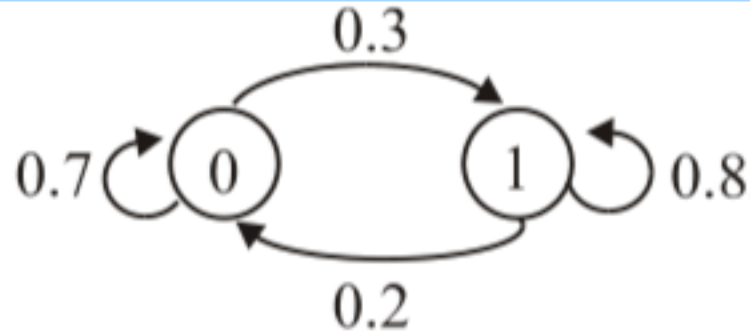
$$\boldsymbol{\pi} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^n = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^0\mathbf{P}^n, \quad con\ \pi_i > 0, \forall i.$$

Teorema. Para una cadena de Markov ergódica e irreducible existe $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ y es independiente de i. Además, haciendo $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$, entonces π_j es la única solución no negativa de

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, \ j \geq 0$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

Ejemplo

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$



La cadena es finita, irreducible y aperiódica. Por lo tanto, existe la distribución de equilibrio que es obtiene resolviendo

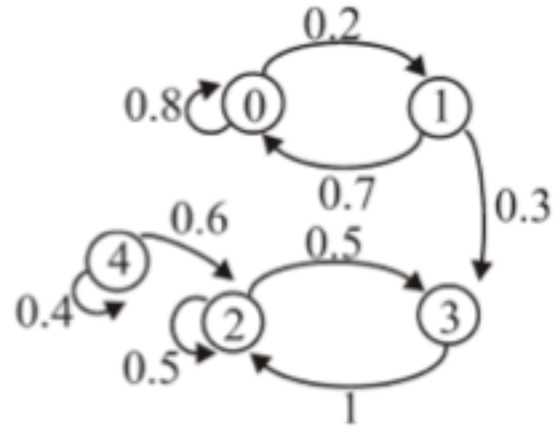
$$\begin{array}{l} (\pi_0, \pi_1) = (\pi_0, \pi_1)\,\mathbf{P} \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_0 = 0{,}7\pi_0 + 0{,}2\pi_1 \\ \pi_1 = 0{,}3\pi_0 + 0{,}8\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1) = (0{,}4, 0{,}6)$$

Ahora veremos qué ocurre cuando algunas de las condiciones de los teoremas anteriores no se verifican, es decir, cuando las cadenas no son irreducibles y aperiódicas.

En primer lugar, supongamos que **P** es **reducible** con clases recurrentes R_1, R_2,…, R_R y las clases de transición T_1, T_2,…, T_t. Cada clase recurrente se comporta como una subcadena de Markov.

Ejemplo

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $(\pi_2, \pi_3) = (2/3, 1/3)$ es la solución de

$$\begin{matrix} (\pi_2, \pi_3) = (\pi_2, \pi_3)\,\mathbf{P}' \\ \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \pi_2 = 0{,}5\pi_2 + \pi_3 \\ \pi_3 = 0{,}5\pi_2 \\ \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Supongamos ahora que **P** es irreducible, pero tiene **periodo** $d > 1$.

Proposición. Sea una cadena de Markov irreducible, recurrente positiva y periódica con periodo $d > 1$. Entonces, existe solución única no negativa del sistema

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, \; j \geq 0$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

y para cualquier distribución inicial $\boldsymbol{\pi}^0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d}\left(\boldsymbol{\pi}^0 \mathbf{P}^{n+1} + \cdots + \boldsymbol{\pi}^0 \mathbf{P}^{n+d}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d}\left(\boldsymbol{\pi}^{n+1} + \cdots + \boldsymbol{\pi}^{n+d}\right) = \boldsymbol{\pi}.$$

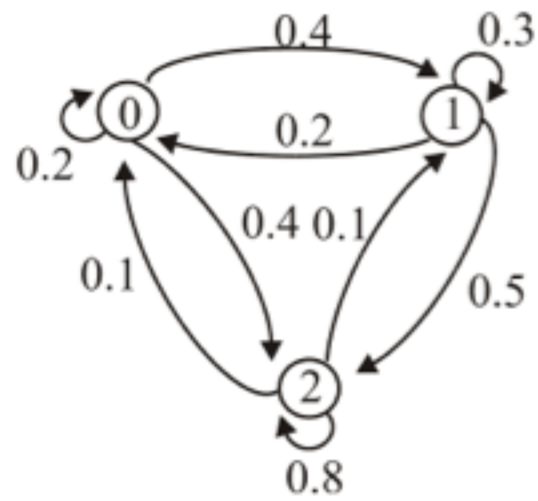
π_j representa la **fracción de tiempo a largo plazo que la cadena está en el estado** j.

m_i representa el **número esperado de pasos hasta volver a** i.

$$m_i = \frac{1}{\pi_i}$$

Ejemplo. Consideremos la CMTD con matriz y diagrama de transición.

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$



1. ¿Cuál es la proporción de tiempo, a largo plazo, que la cadena está en cada uno de los estados?
2. ¿Cuál es el número medio de iteraciones para que la cadena vuelva al estado i supuesto que ha partido del estado i?

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0{,}2\pi_0 + 0{,}2\pi_1 + 0{,}1\pi_2 \\ \pi_1 &= 0{,}4\pi_0 + 0{,}3\pi_1 + 0{,}1\pi_2 \\ \pi_2 &= 0{,}4\pi_0 + 0{,}5\pi_1 + 0{,}8\pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (3/23, 12/69, 48/69)$$

$$m_0 = 1/\pi_0 = 23/3,$$

$$m_1 = 1/\pi_1 = 69/12 \text{ y } m_2 = 1/\pi_2 = 69/48.$$

Cinco componentes de un equipo de voleibol están realizando el siguiente entrenamiento: Las cinco personas se colocan en línea y desde lo alto se lanza un balón verticalmente sobre el componente situado en el centro de la fila. La persona a la que le cae el balón lo golpea hacia arriba. Como todos son buenos jugadores, en la mayoría de los casos, el golpeo es correcto, con lo que el balón sube y le vuelve a caer. Sólo en el 20 por ciento de los casos, el balón se pierde por golpeo incorrecto. El entrenamiento se está realizando al aire libre y el día ha salido ventoso, con lo cual, a pesar de la pericia de los jugadores, es posible que el viento desplace el balón apartándolo de la vertical y empujándolo hacia otro jugador que será el siguiente en golpear el balón. El viento sopla un 80% del tiempo de entrenamiento y curiosamente en una dirección siempre paralela a la fila de jugadores aunque con sentido aleatorio (puede soplar con igual probabilidad en los dos posibles sentidos de la fila). La intensidad del viento, cuando sopla, es también variable. Normalmente, se trata de un viento suave que desplaza el balón la distancia equivalente a la separación entre dos jugadores en el sentido en que sopla, pero con probabilidad 0.3 se dan rachas fuertes capaces de desplazar el balón dos veces dicha distancia. El viento también puede actuar, igualmente, cuando se lanza el balón desde lo alto al inicio del juego. Cada vez que el balón se cae, bien por error del jugador, bien por que el viento haya desplazado el balón fuera de la fila, se reanuda el entrenamiento lanzando el balón desde lo alto. Se desea conocer los siguientes parámetros:

- Duración media (número de golpeos) de una serie sin error del entrenamiento.
- Proporción de golpes sobre el total que da cada uno de los jugadores.
- Proporción de cortes en el entrenamiento imputables al viento.

Se pide:

a. Construir una CMTD que modelice el entrenamiento y permita estimar los parámetros solicitados. (Indicar claramente la definición de los estados considerados, la matriz de probabilidades de transición y la distribución inicial).
b. Construir el sistema de ecuaciones que permiten obtener la distribución estacionaria de la cadena.
c. Indicar el método para obtener los parámetros solicitados en función de la distribución estacionaria resultante.
d. Para hacer más emocionante el entrenamiento, se les ha incentivado con un premio si consiguen una serie de más de 5 golpes seguidos. Indicar cómo calcular la probabilidad de que obtengan el premio en un único intento.